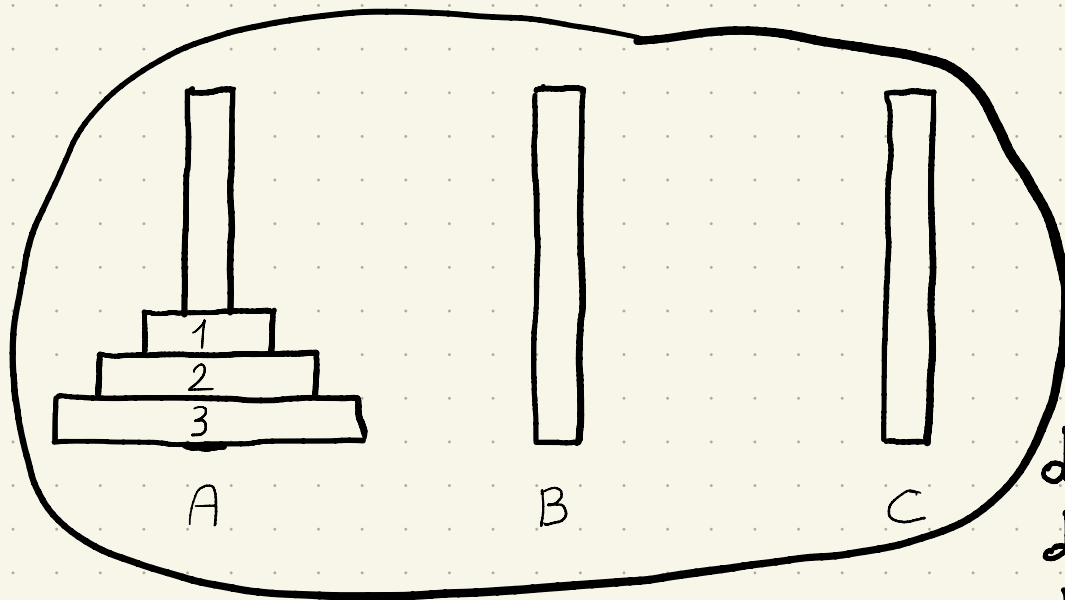


Tours de Hanoi

- 3 tours.
- N disques troués en leurs centres.
Tous de diamètres différents.
- Un disque est au bas d'une tour ou au dessus d'un disque plus grand que lui.



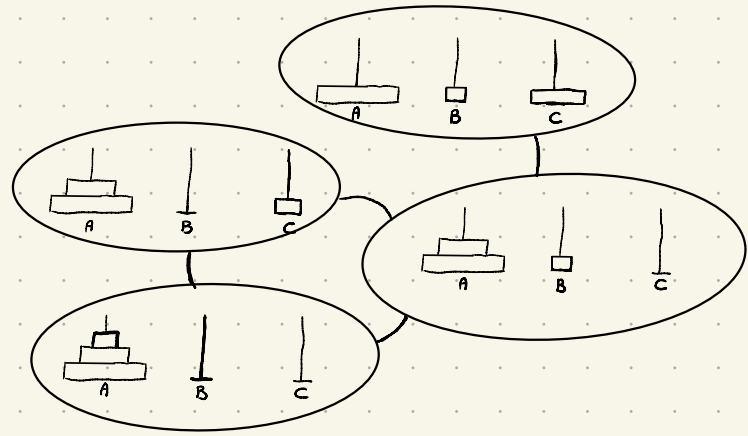
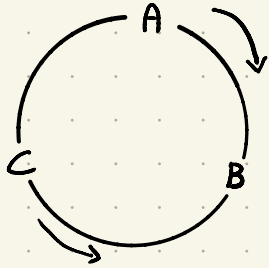
Configuration
initiale pour
 $N=3$

Notation abrégée:

AAA
disque 1 sur A ←
disque 2 sur A ←
disque 3 sur A ←

- Un disque au sommet d'une tour peut être déplacé au sommet d'une autre si la configuration atteinte respecte la contrainte précédente.
- Graphe dont les nœuds sont les configurations et dont les arêtes sont les déplacements possibles.
- Objectif: calculer sur ce graphe un plus court chemin pour passer d'une configuration initiale où tous les disques sont sur une même tour vers une configuration finale où ils sont tous sur une autre tour.

- Exemple du voisinage de BAA : AAA, CAA, BCA
- Le problème est muni d'une symétrie circulaire



- Cette symétrie permet d'exprimer simplement une solution récursive.

$\langle n, d \rangle$: déplacer le disque n dans le sens d .

$H_n \cdot d$: déplacer les n plus petits disques (qui sont tous sur une même tour) vers leur tour voisine dans le sens d .

$[]$: liste vide

$[a, b] ++ [c, d, e] = [a, b, c, d, e]$: concaténation

$$H_0 \cdot d = []$$

$$H_{n+1} \cdot d = H_n \cdot \neg d ++ [\langle n+1, d \rangle] ++ H_n \cdot \neg d$$

- Solution itérative :

- Le plus petit disque est joué une fois sur deux.
- Il tourne toujours dans le même sens.

→ Tester cette formulation itérative.

- $T_n =$ Taille de H_n

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_{n+1} = 2T_n + 1 \end{cases}$$

hypothèse : $T_n = 2^n - 1$

cas de base : $T_0 = 2^0 - 1$

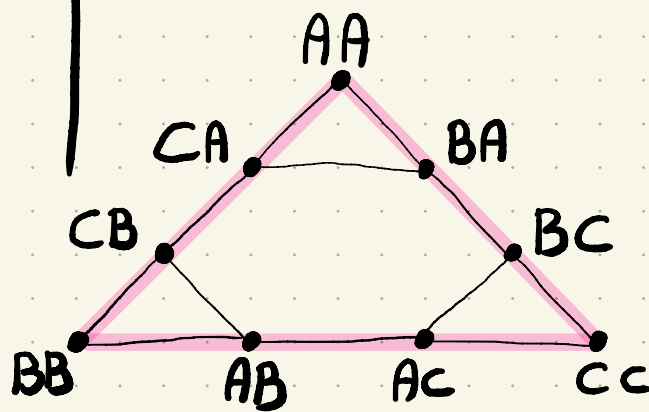
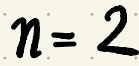
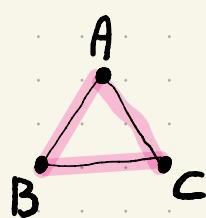
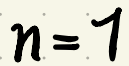
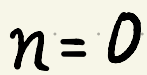
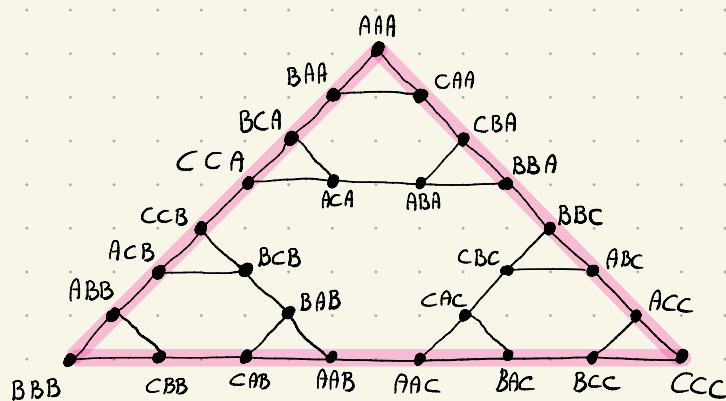
induction : $T_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$

- Taille de l'espace de recherche : 3^n

Car, pour construire une solution,

- on place le disque n à la base d'une tour (3 choix)
- puis le disque $n-1$ au sommet d'une des tours (3 choix)
- etc.

- Structure de l'espace de recherche


$$n=3$$


- La solution récurrente et celle itérative présentées plus haut sont équivalentes. Elles sont optimales. Elles consistent à toujours rester sur le bord de la structure fractale de l'espace de recherche.

- Quel est le sens de rotation du disque 1 ?
D'après la formulation récursive :

n tourne dans le sens d

$n-1$ ————— $\neg d$

$n-2$ ————— d

Etc.

Donc, la relation entre la parité de n et son sens de rotation reste constante.

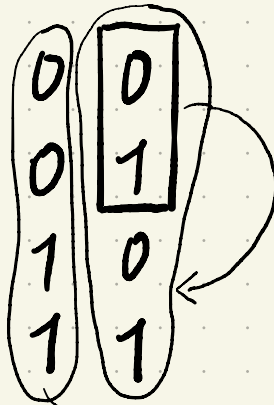
Par exemple, pour 7 disques qui doivent tourner dans le sens faux, la parité de n et le sens de rotation du disque n ont même valeur de vérité. Donc, le disque 1 doit tourner dans le sens faux.

• Construction récursive du codage binaire classique

1 bit

0
1

2 bits



recopie de la structure pour 1 bit

Complément pour distinguer les deux copies.

3 bits

0	00
0	01
0	10
0	11
1	00
1	01
1	10
1	11

• Construction récursive du codage de Gray

1 bit

0
1

2 bits

0	0
0	1
1	1
1	0

recopie miroir

3 bits

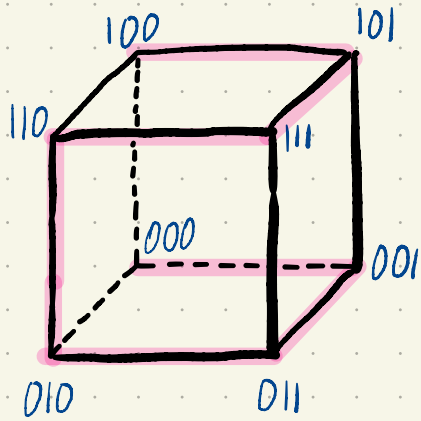
0	00	→ 1
0	01	→ 2
0	11	→ 1
0	10	→ 3
1	10	→ 1
1	11	→ 2
1	01	→ 1
1	00	→ 3

indice du bit qui change

Lors du passage d'un code au suivant, un seul bit change.

C'est la séquence des disques à déplacer pour résoudre le problème des tours de Hanoi.

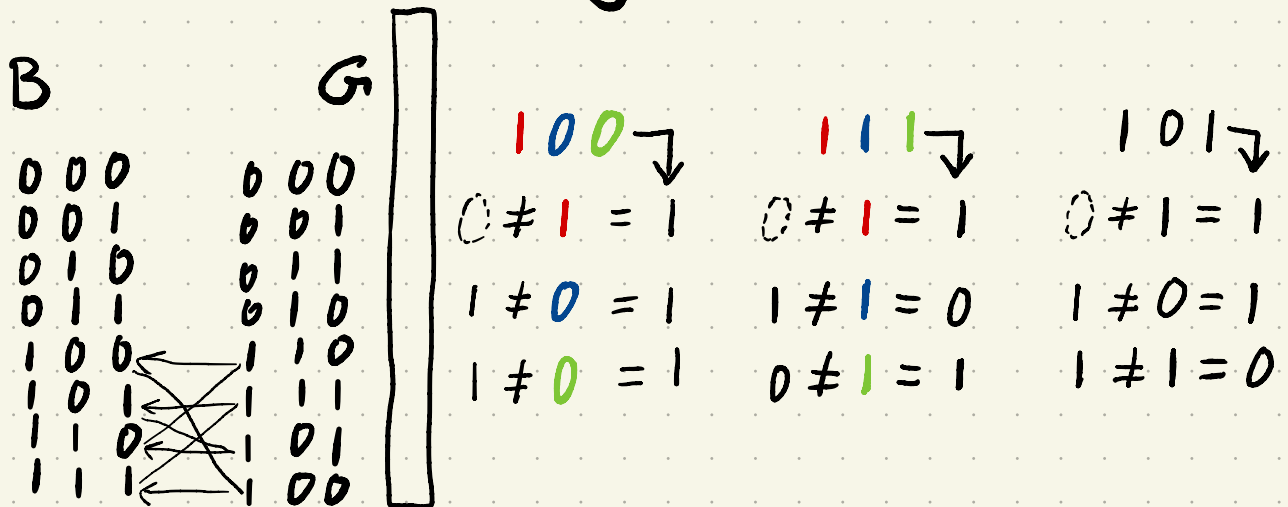
- Codage binaire pour identifier les sommets d'un hypercube booléen.



La suite des codes de Gray correspond à un chemin hamiltonien le long des arêtes d'un hypercube booléen.

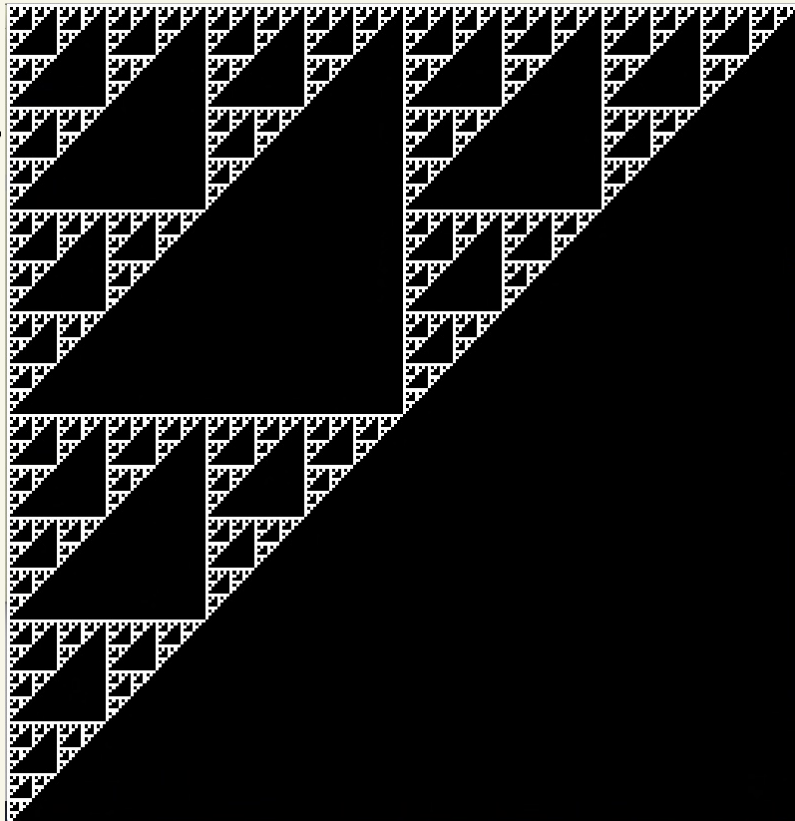
On retrouve dans la structure de ce chemin la solution du problème des tours de Hanoï.

- Traduction Binaire $\leftrightarrow$ Gray



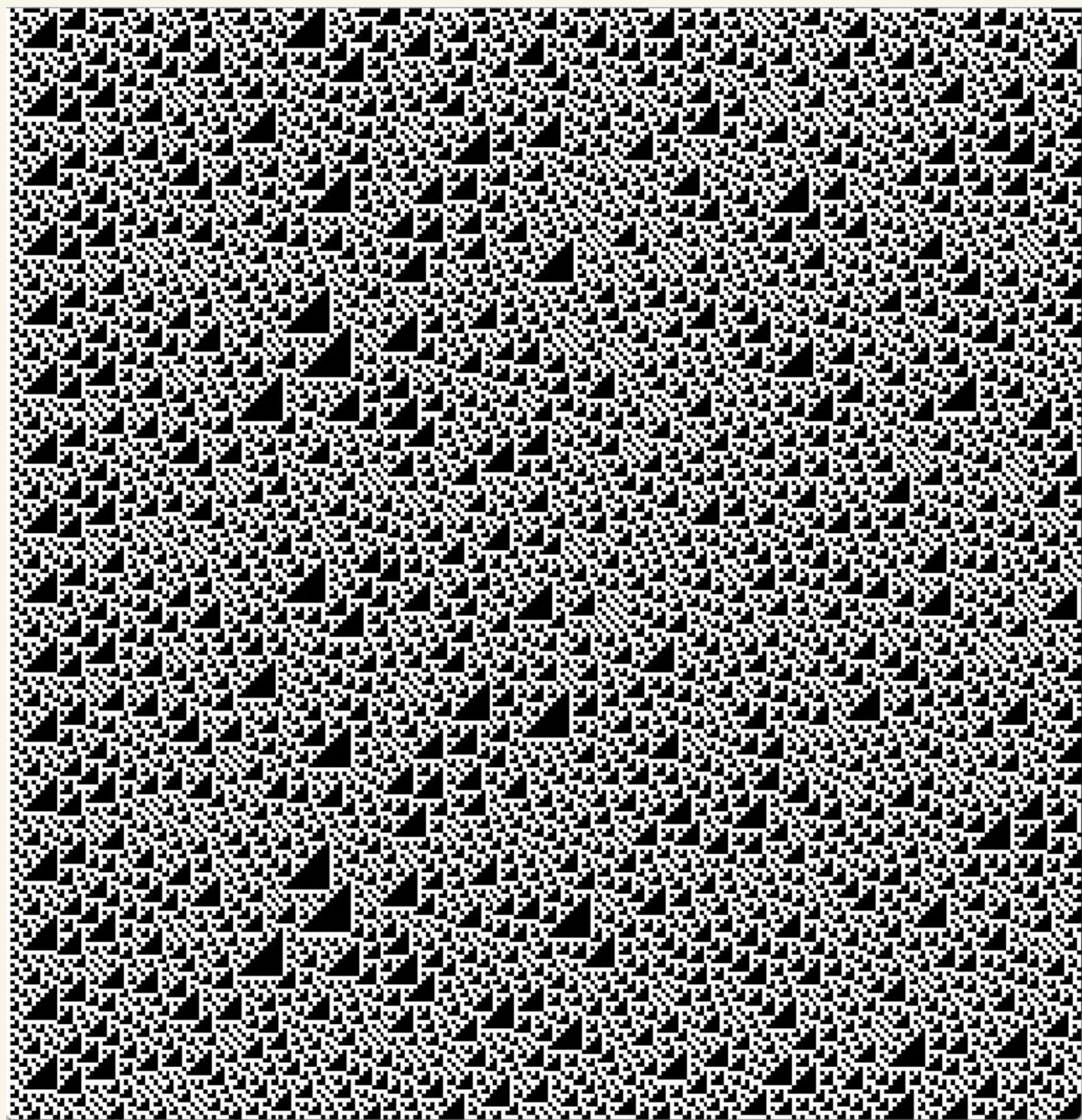
Pour 3 bits $\rightarrow$ $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

Pour 256 bits $\rightarrow$



On retrouve une structure fractale analogue à celle de l'espace de recherche du problème des tours de Hanoï.

En partant d'une chaîne aléatoire de 256 bits.



On pressent une analogie avec les automates cellulaires uni-dimensionnels.

"Rule 30" dans la classification de Wolfram.
Voir son ouvrage "A New Kind of Science"

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	1	1	1	0
$16 + 8 + 4 + 2 = 30$							

